La ricerca operativa con "Derive"

prof. Guida

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

……sono quei problemi nei quali gli effetti della scelta sono noti e immediati

ESERCIZIO 1 (utilizzo della retta)

Un commerciante vende una certa merce a 2 € al Kg. Sapendo che la merce gli costa 1,5€ il Kg e che deve sostenere spese fisse settimanali di trasporto di 90 €, calcolare la quantità di merce da vendere per consentirgli il massimo utile settimanale

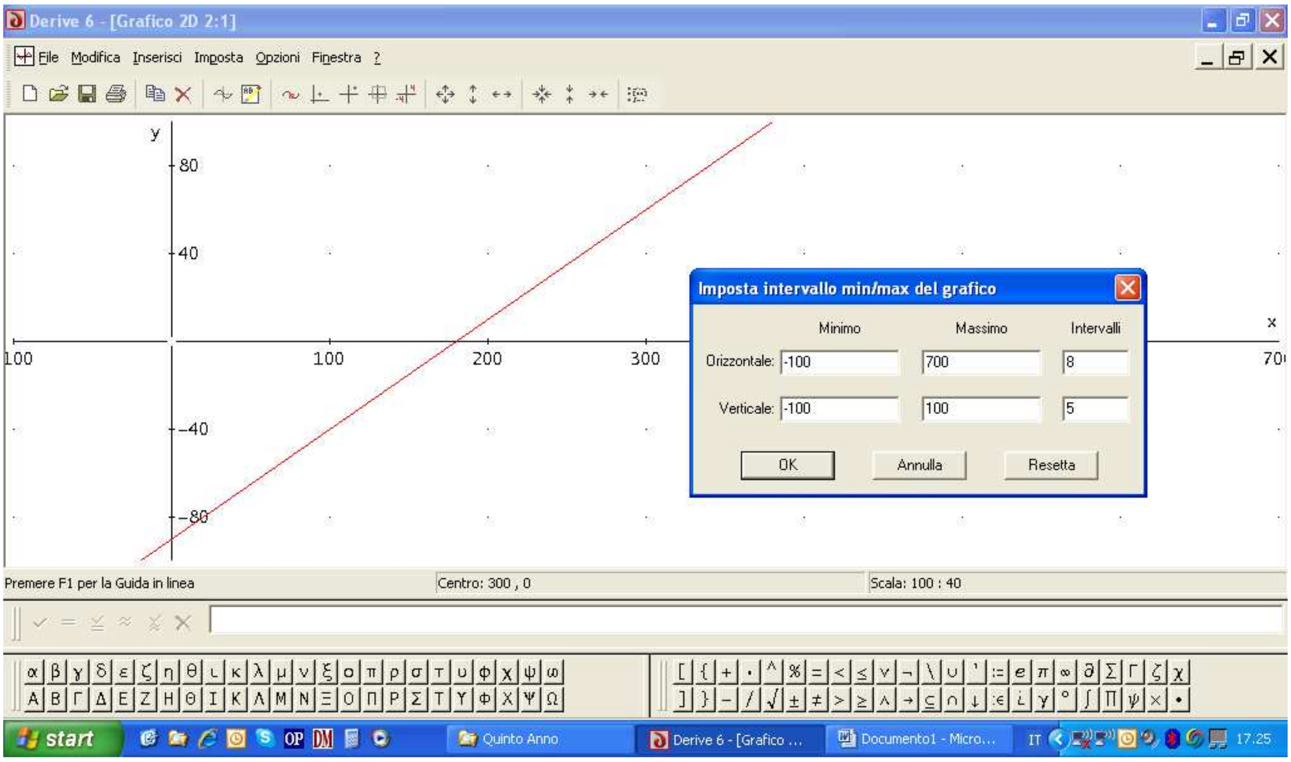
La variabile di scelta x è la quantità di merce da vendere. Si opera nel continuo in quanto la quantità di merce da vendere può assumere un numero infinito di valori.

DATI

x =la quantità venduta settimanalmente $x \geq 0$
R(x)=2x (funzione ricavo)
C(x)= 1,5x+90 (funzione costo)
La funzione che rappresenta l'utile (guadagno) è data da: U(x)=ricavi-costi

U(x)= y=R(x)-C(x)= 2x-(1,5x+90) --> **y=0,5x-90** (funzione obiettivo o oggetto)

Si rappresenta graficamente la f.o. con le seguenti impostazioni d'intervallo: orizzontale -100 700 8 verticale -100 100 5



Si rende pertanto necessario stabilire il punto d'intersezione della retta con l'asse x mediante la risoluzione del sistema:

#2: SOLVE([y = 0.5·x - 90, y = 0], [x, y])

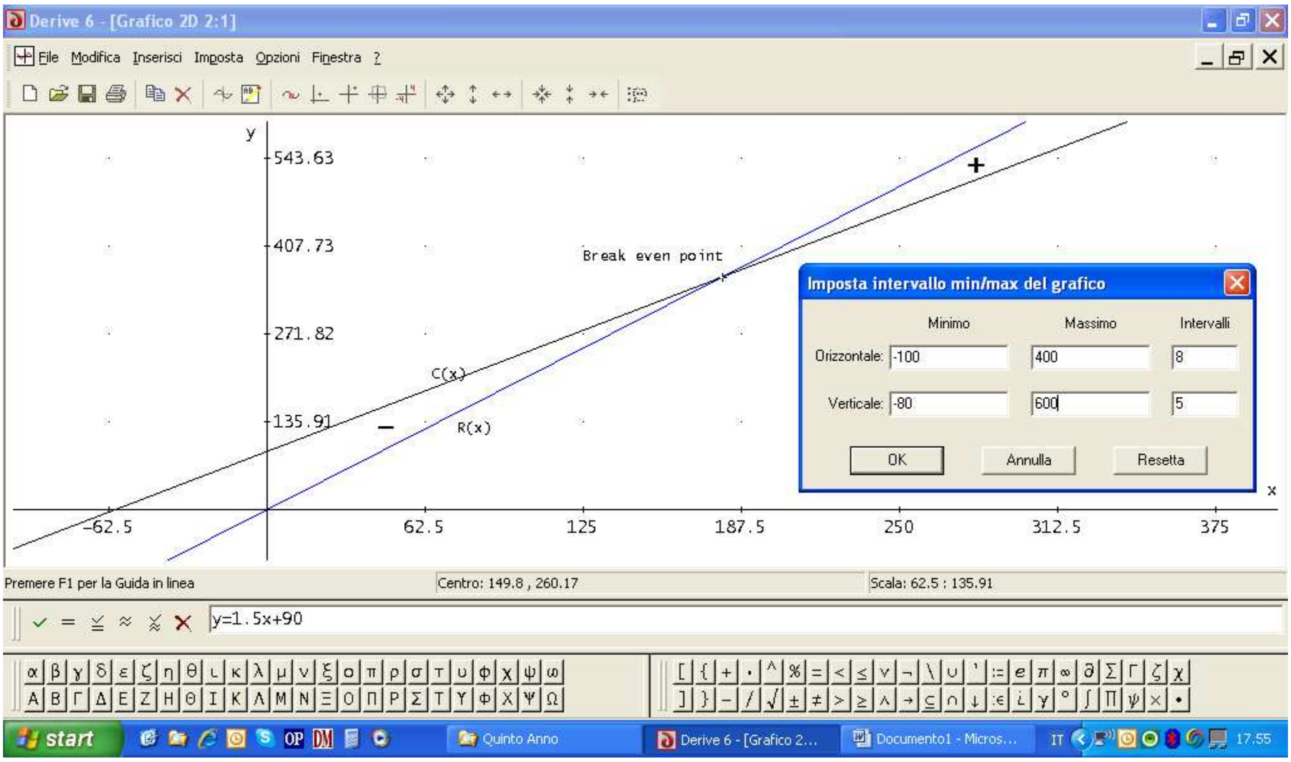
#3: [x = 180 ∧ y = 0]

Dunque, per x=180 non ha nè guadagni nè perdite; solo vendendo una quantità di merce superiore a 180 kg il commerciante realizza un guadagno che è tanto più alto quanto maggiore è la quantità venduta; per x<180 il commerciante avrebbe una perdita che è pari a 90€ se non vende nulla (x=0):l'intercetta all'origine è q=-90

E' possibile evidenziare meglio la situazione dei ricavi e dei costi mediante **il diagramma di redditività**, rappresentando separatamente, ma sullo stesso piano cartesiano, la funzione ricavo y=2x e quella dei costi y=1,5x+90. Il punto d'intersezione delle due rette è chiamato BREAK EVEN POINT (PUNTO DI PAREGGIO in cui i ricavi uguagliano i costi)

#4: y = 2·x

#5: y = 1.5·x + 90



PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 2 (utilizzo della retta)

Un'azienda produce un certo tipo di cosmetico che vende a 2,5 € il pezzo. La produzione massima è di 500 pezzi e per essa l'azienda sostiene una spesa fissa giornaliera di 150 € ed una spesa variabile di € 1,50 il pezzo. Determinare qual è il numero massimo di pezzi che deve vendere giornalmente per avere il massimo guadagno e determinarlo.

E' un problema discreto perché il nr. di pezzi da vendere giornalmente deve essere intero.

DATI

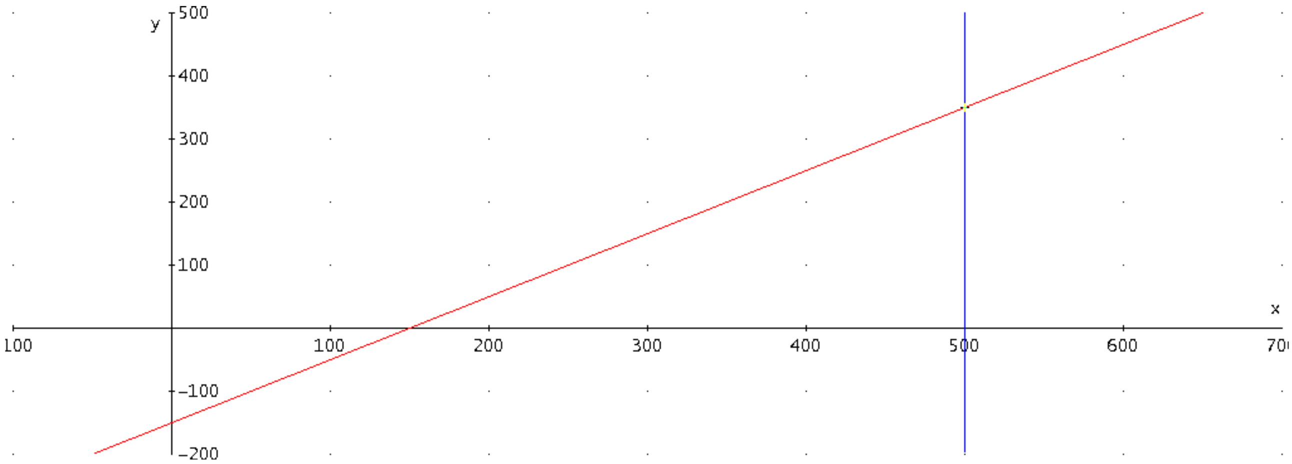
x =la quantità venduta giornalmente $0 \leq x \leq 500$
R(x)=2,5x (funzione ricavo)
C(x)= 1,5x+150 (funzione costo)
La funzione che rappresenta l'utile (guadagno) è data da: U(x)=ricavi-costi

U(x)= y=R(x)-C(x)= 2,5x-(1,5x+150) --> **y=x-150** (funzione obiettivo o oggetto)

Il vincolo di produzione è dato da x≤500 dove x è il nr. di pezzi da vendere giornalmente. la funzione obiettivo è:y=2,5x-(1,5x+150) --> y=x-150

Si rappresenta graficamente la f.o. con le seguenti impostazioni d'intervallo: orizzontale -100 700 8 verticale -200 300 5

#6: y = x - 150



Si rende necessario stabilire il punto d'intersezione della retta con l'asse x mediante la risoluzione del sistema:

#7: SOLVE([y = x - 150, y = 0], [x, y])

#8: $[x = 150 \land y = 0]$

Pertanto per x=150 non ha nè guadagni nè perdite; solo vendendo giornalmente una quantità di merce superiore a 150 kg il commerciante realizza un guadagno che è massimo per x=500 kg cioè y=350 €;; per x<150 il commerciante avrebbe una perdita che è pari a 150€ se non vende nulla (x=0)

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 3 (utilizzo della retta)

Per produrre una certa merce, si sostengono costi fissi di 700€ e un costo per ogni chilogrammo di merce di 3,45€. la produzione massima consentita è di 650 kg. La merce viene rivenduta a 5,72€ il kg. Quanta merce bisogna vendere per avere il massimo guadagno?

Anche questo problema è possibile svolgerlo nei due modi: rappresentando la funzione obiettivo oppure mediante diagramma di redditività.

1° modo: rappresentiamo graficamente la funzione obiettivo

DATI

x =la quantità venduta $0 \le x \le 650$

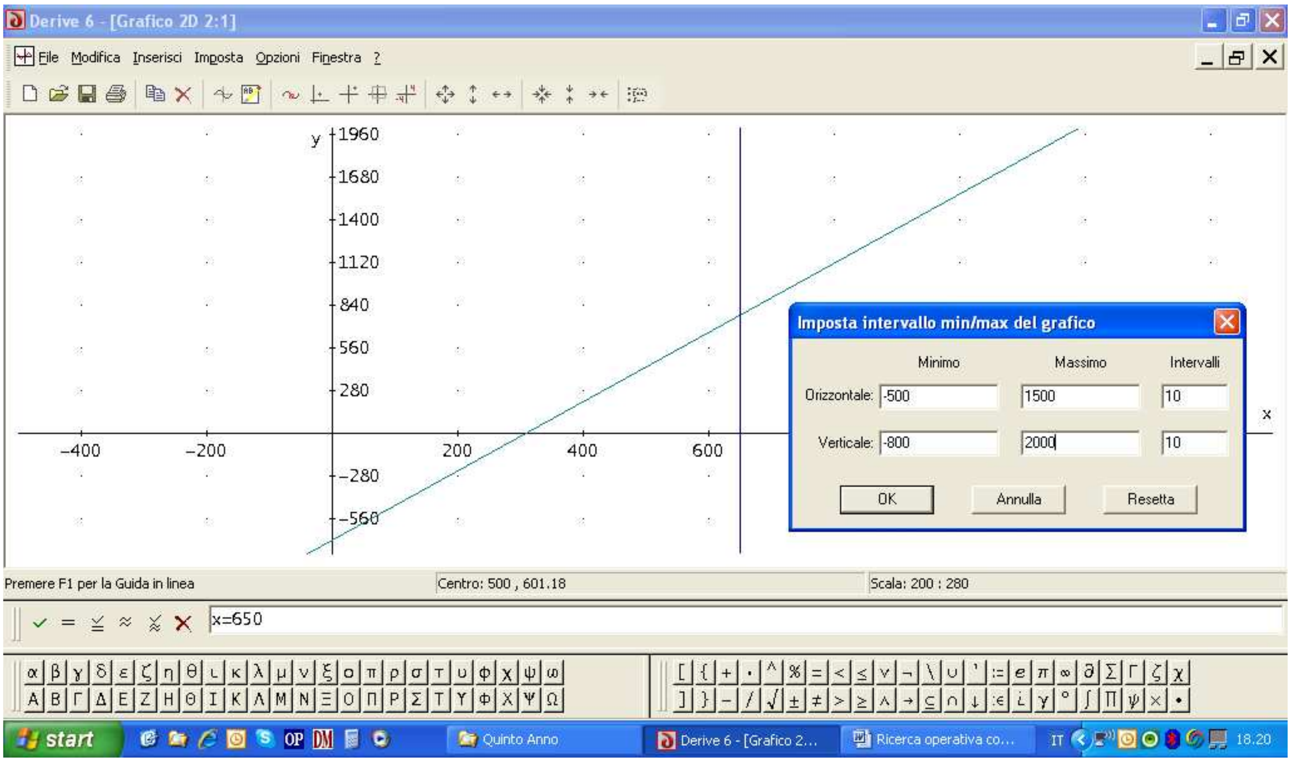
R(x)=5,72x (funzione ricavo)

C(x)= 3,45x+700 (funzione costo)

La funzione che rappresenta l'utile (guadagno) è data da: U(x)=ricavi-costi

U(x)= y=R(x)-C(x)=5,72x-(3,45x+700) --> **y=2,27x-700** (funzione obiettivo)

#19: $y = 2.27 \cdot x - 700$ con le impostazioni raffigurate



Si rende necessario stabilire il punto d'intersezione della retta con l'asse x mediante la risoluzione del sistema:

SOLVE([y = 2.27·x − 700, y = 0], [x, y])

$$\left[x = \frac{70000}{227} \wedge y = 0\right]$$

$$\text{APPROX}\left(\left[x = \frac{70000}{227} \wedge y = 0\right], 5\right)$$

$$[x = 308.37 \wedge y = 0]$$

Pertanto per x=308 kg non ha nè guadagni nè perdite; solo vendendo giornalmente una quantità di merce superiore a 308 kg il commerciante realizza un guadagno che è massimo per x=650 kg cioè:

y := 2.27·x − 700

x := 650

y

$$\frac{1551}{2}$$

$$775.5$$

y= 775,5 €;; per x<308 il commerciante avrebbe una perdita che è pari a 150€ se non vende nulla (x=0)

2° modo: rappresentiamo graficamente le due funzioni ricavo y=5,72x e costo y=3,45x+700

#14: y = 5.72·x

#15: y = 3.45·x + 700

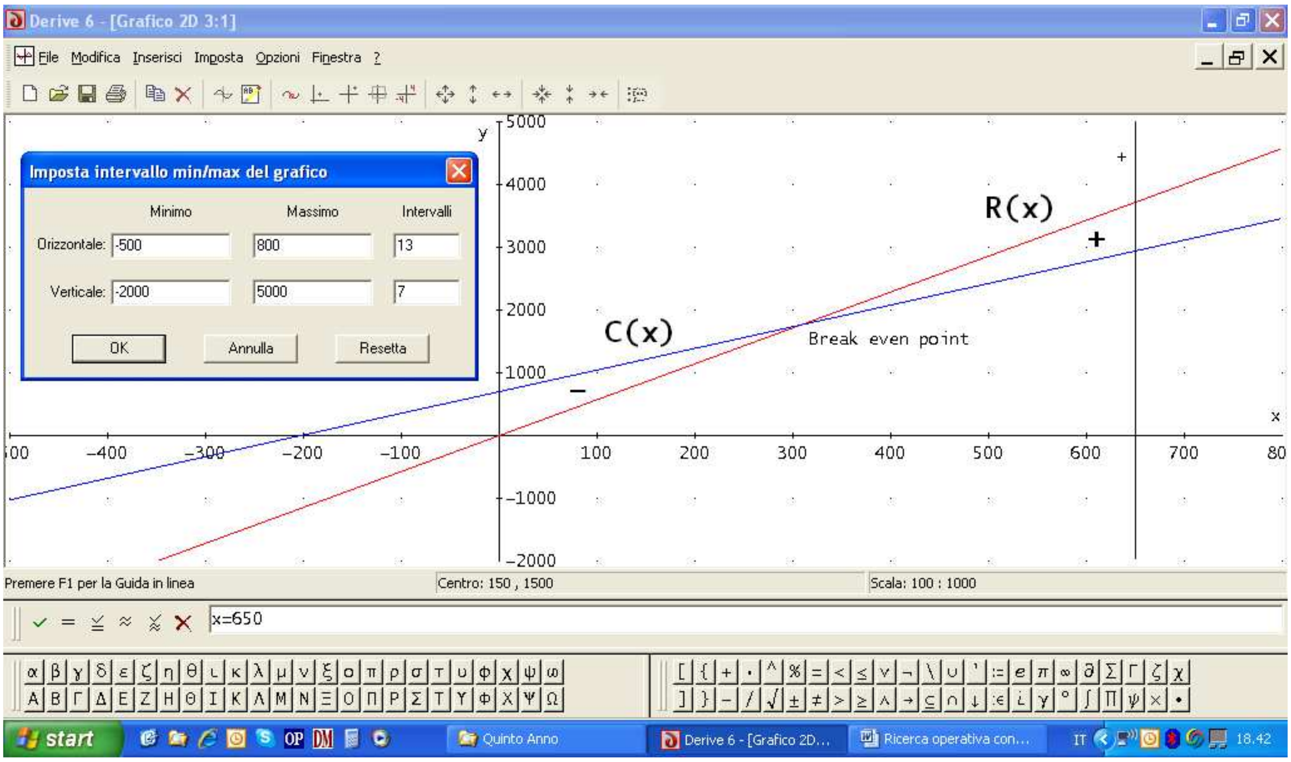
Si determina quindi il BREAK EVEN POINT risolvendo il sistema con le due equazioni

#16: SOLVE([y = 5.72·x, y = 3.45·x + 700], [x, y])

#17: $$\left[x = \frac{70000}{227} \wedge y = \frac{400400}{227}\right]$$

#18: $$[x = 308.37 \wedge y = 1763.8]$$

Si rappresentano graficamente le due rette con le impostazioni:
orizzontale −500 800 13 verticale −2000 5000 7



CONCLUSIONI: vediamo che per la quantità prodotta x=308 i costi uguagliano i ricavi, per x>308 kg i ricavi sono superiori ai costi e si ha un guadagno che cresce fino al massimo consentito di produzione di 650 kg che, come visto sopra, corrisponde a

$$R(650)-C(650) = 5{,}72\cdot 650-(3{,}45\cdot 650+700)= 3718-2942{,}5= 775{,}5€$$

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

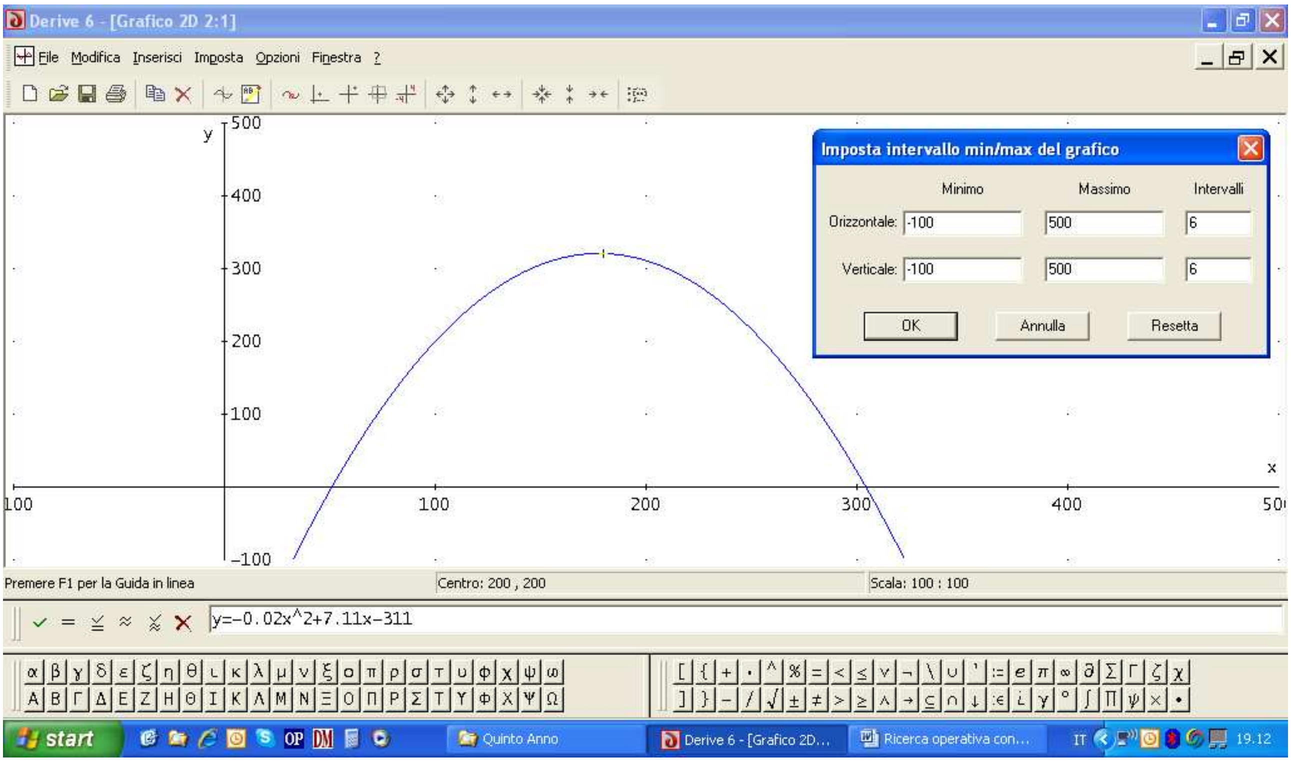
ESERCIZIO 4 (utilizzo della parabola)

Una ditta produce della merce che viene venduta al prezzo p=3+0,98x al kg,dove x indica il numero di chilogrammi di merce immessa settimanalmente sul mercato al prezzo p. La ditta deve sostenere costi settimanali C(x) espressi dalla relazione: C(x)=x^2-4,11x+311. Determinare:
a)la quantità di merce da produrre settimanalmente per conseguire il massimo utile;
b)il massimo utile settimanale;
c)il prezzo di vendita corrispondente al massimo utile settimanale.

DATI
$R(x)=p\cdot x=(3+0,98x)\cdot x=0,98x^2+3x$
$C(x)=x^2-4,11x+311$
f.o. --> $U(x)=R(x)-C(x)= 0,98x^2+3x -(x^2-4,11x+311)=$.........
$U(x)= y=-0,02x^2+7,11x-311$ (funzione obiettivo: utile settimanale)

Si procede alla rappresentazione grafica con impostazioni
orizzontale -100 500 6 verticale -100 500 6 della seguente funzione

$$\#20: \quad y = -0.02\cdot x^2 + 7.11\cdot x - 311$$



per poter risalire alla quantità massima da produrre (ascissa del vertice) per avere il massimo utile, basterà annullare la derivata prima della funzione obiettivo e ricavare il valore della x:

#21: $\frac{d}{dx}(-0.02\cdot x^2 + 7.11\cdot x - 311)$

#22: $\frac{711}{100} - \frac{x}{25}$

#23: $\frac{711}{100} - \frac{x}{25} = 0$

#24: $\text{SOLVE}\left(\frac{711}{100} - \frac{x}{25} = 0,\ x\right)$

#25: $x = \frac{711}{4}$

#26: $x = 177.75$

pertanto la quantità di merce che conviene produrre è x=177,75 in corrispondenza della quale si realizza il max guadagno:

#27: $U(x) := -0.02\cdot x^2 + 7.11\cdot x - 311$

#28: $x := 177.75$

#29: $U(x)$

#30: $\frac{641790179}{2000000}$

#31: 320.89

dunque il massimo utile che la ditta può raggiungere è di € 320,90

Il prezzo di vendita della merce con cui la ditta realizza il massimo guadagno è:

#32: $p(x) = 3 + 0.98\cdot x$

#33: $3 + 0.98\cdot 177.75$

#34: $\frac{35439}{200}$

#35: 177.19

<u>Il campo di scelta</u> varia tra i valori della x compresi nell'intervallo x_1 e x_2 i cui valori si ricavano dall'intersezione della f.o. con l'asse x, risolvendo il seguente sistema:

$$\mathrm{SOLVE}\left(\left[y = -0.02 \cdot x^2 + 7.11 \cdot x - 311,\ y = 0\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\left[x = \frac{\sqrt{256721}}{4} + \frac{711}{4} \wedge y = 0,\ x = \frac{711}{4} - \frac{\sqrt{256721}}{4} \wedge y = 0\right]$$

$$\mathrm{APPROX}\left(\left[x = \frac{\sqrt{256721}}{4} + \frac{711}{4} \wedge y = 0,\ x = \frac{711}{4} - \frac{\sqrt{256721}}{4} \wedge y = 0\right],\ 5\right)$$

$$[x = 304.41 \wedge y = 0,\ x = 51.080 \wedge y = 0]$$

FORMULE PER EVENTUALI CALCOLI RELATIVI ALLA PARABOLA:

Discriminante:	$\Delta = b^2 - 4ac$
Equazione dell'asse di simmetria:	$x = -\frac{b}{2a}$
Coordinate del vertice:	$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 5 (utilizzo della parabola)

Un'industria, che ha una capacità produttiva massima giornaliera di 3000 hg (ettogrammi), produce e vende in condizioni di monopolio un dato bene al prezzo unitario p=2,5-0,0005x, dove x è il numero di ettogrammi prodotti e offerti in un giorno. Sapendo che i costi di produzione sono dati da:
costo fisso giornaliero = € 1000
costo per hg di prodotto = € 0,60
determinare quale quantità conviene produrre e vendere per realizzare il massimo utile e quale quantità minima occorre vendere per non lavorare in perdita.
N.B. 1 ettogrammo=0,1 kg

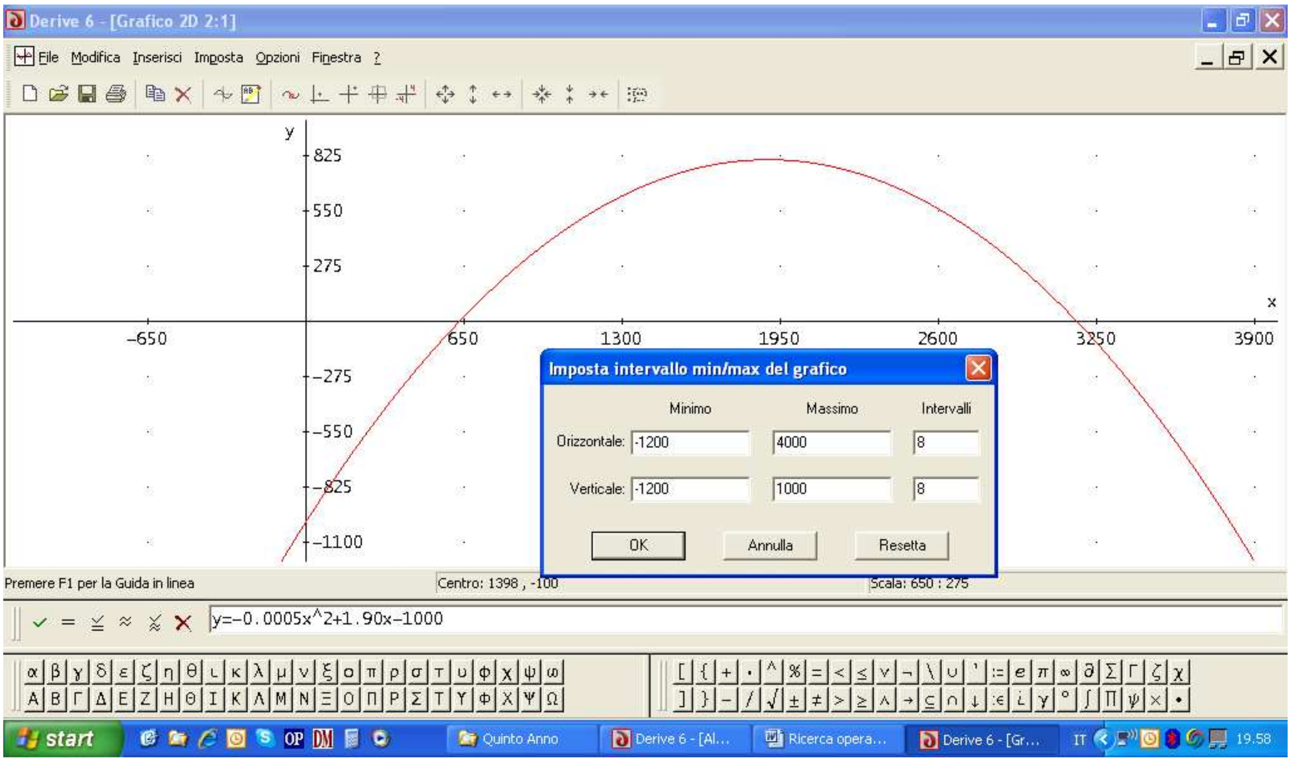
DATI
$C(x)=0,60x+1000$
$R(x)=p\cdot x=(2,50-0,0005x)\cdot x = 2,50x-0,0005x^2$
$0\leq x\leq 3000$

F.O. --> $U(x)=R(x)-C(x)$ --> $y=2,50x-0,0005x^2-(0,60x+1000)$

F.O. --> $\mathbf{y=-0,0005x^2+1,90x-1000}$ **con** $\mathbf{0\leq x\leq 3000}$

che rappresentiamo graficamente con le seguenti impostazioni:
orizzontale -1200 4000 8 verticale -1200 1000 8

$$\#1:\quad y = -\,0.0005\cdot x^2 + 1.9\cdot x - 1000$$



Per ricavare l'ascissa del vertice, derivare la funzione obiettivo e porla uguale a zero, risolvendo successivamente l'equazione.

#2: $\frac{d}{dx}(-0.0005\cdot x^2 + 1.9\cdot x - 1000)$

#3: $\frac{19}{10} - \frac{x}{1000}$

#4: $\frac{19}{10} - \frac{x}{1000} = 0$

#5: $\text{SOLVE}\left(\frac{19}{10} - \frac{x}{1000} = 0,\ x\right)$

#6: $x = 1900$

Si procede calcolando il corrispondente valore della funzione

#2: $y := -0.0005\cdot x^2 + 1.9\cdot x - 1000$

#3: $x := 1900$

#4: y

#5: 805

Pertanto 1900 hg è la quantità giornaliera che conviene produrre per realizzare il massimo guadagno di € 805.
Per calcolare la quantità minima da produrre per non andare in perdita, si determinano le intersezioni della f.o. con l'asse x di equazione y=0

#2: $\text{SOLVE}([y = -0.0005\cdot x^2 + 1.9\cdot x - 1000,\ y = 0],\ [x,\ y])$

#3: $[x = 100\cdot\sqrt{161} + 1900 \wedge y = 0,\ x = 1900 - 100\cdot\sqrt{161} \wedge y = 0]$

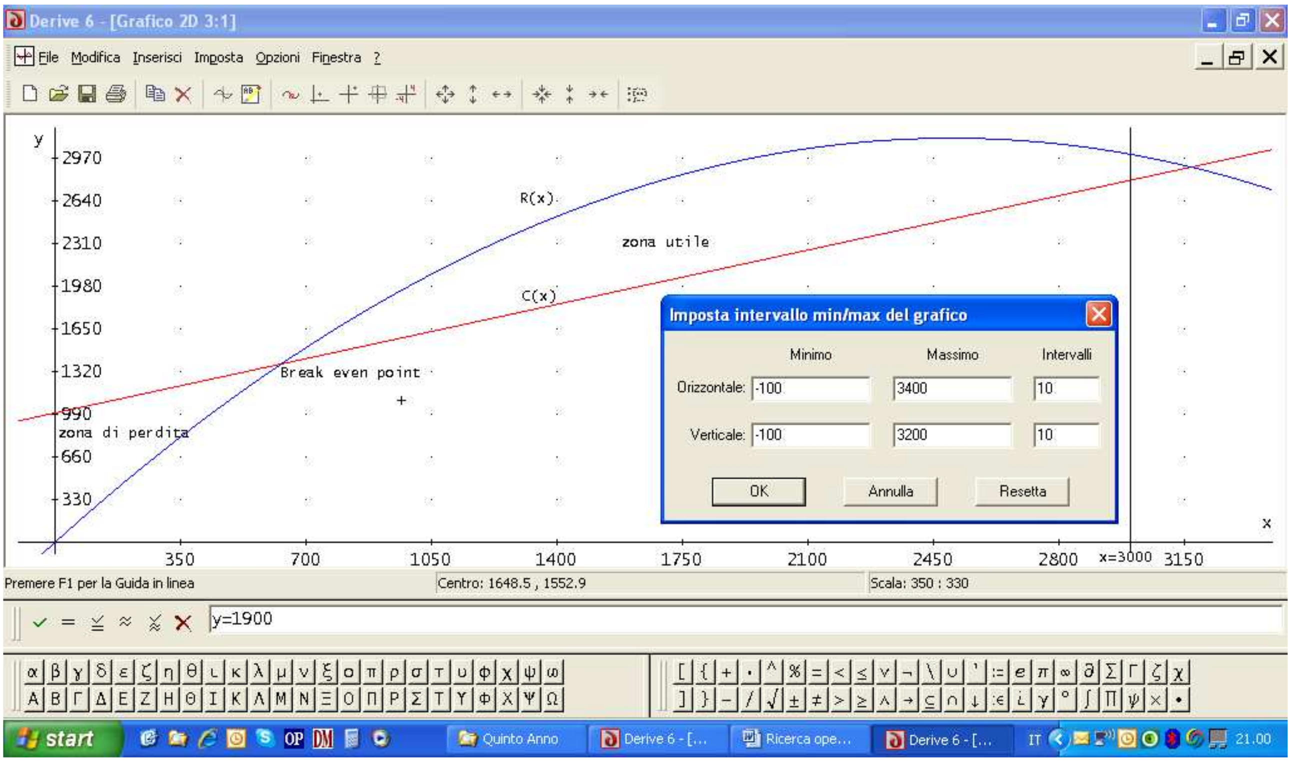
#4: $\text{APPROX}([x = 100\cdot\sqrt{161} + 1900 \wedge y = 0,\ x = 1900 - 100\cdot\sqrt{161} \wedge y = 0],\ 5)$

#5: $[x = 3168.8 \wedge y = 0,\ x = 631.14 \wedge y = 0]$

- Pertanto il campo di scelta è: $631{,}14 \le x \le 3000$ essendo $x \le 3000$ la capacità di produzione
- Per la quantità giornaliera prodotta x=631,14 non si ha alcun guadagno.
- Per quantità prodotte giornaliere minori di 631,14 hg, si ha una perdita.
- Per quantità prodotte giornaliere $631{,}14 \le x \le 3000$ si ha un guadagno che è massimo per x=1900

Si può anche mettere in evidenza la relazione tra costi e ricavi mediante il diagramma di redditività nel quale si individua il punto di rottura (Break even point)

Basterà rappresentare graficamente le due funzioni R(x) e C(x) e commentarle.


Derive 6 - [Grafico 2D 3:1]
File Modifica Inserisci Imposta Opzioni Finestra ?
R(x)
zona utile
C(x)
Break even point
zona di perdita
Imposta intervallo min/max del grafico
Minimo Massimo Intervalli
Orizzontale: -100 3400 10
Verticale: -100 3200 10
OK Annulla Resetta
x=3000
Premere F1 per la Guida in linea
Centro: 1648.5 , 1552.9
Scala: 350 : 330
y=1900

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 6 (utilizzo della funzione particolare: retta + iperbole)

Per confezionare abiti da signora una fabbrica sostiene spese fisse giornaliere di € 532,9 e spese variabili per ogni abito espresse dalla funzione 3,54+0,001x, dove x è il numero di abiti confezionati giornalmente. Quanti abiti deve confezionare la fabbrica affinché il costo unitario sia minimo?

DATI

$C(x)=(3,54+0,001x)x+532,9=0,001x^2+3,54x+532,9$ (costo totale)

$\frac{C(x)}{x}=0,001x+\frac{532,9}{x}+3,54$ (funz. obiettivo costo unitario o costo medio di produzione)

con $x>0$

Occorre minimizzare la funzione obiettivo. A tal fine calcoliamo la derivata prima della f.o.:

$$y = 0.001\cdot x + \frac{532.9}{x} + 3.54$$

$$\frac{d}{dx}\left(0.001\cdot x + \frac{532.9}{x} + 3.54\right)$$

$$\frac{1}{1000} - \frac{5329}{10\cdot x^2}$$

Si pone uguale a 0 e si risolve l'equazione

$$\frac{1}{1000} - \frac{5329}{10\cdot x^2} = 0$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{1000} - \frac{5329}{10\cdot x^2} = 0,\ x\right)$$

$$x = -730 \vee x = 730$$

Essendo $x>0$ si considera x=730

Che si tratti di un punto di minimo basterà verificare che la derivata seconda sia maggiore di zero per x=730

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(0.001\cdot x + \frac{532.9}{x} + 3.54\right)$$

$$\frac{5329}{5\cdot x^3}$$

…che è un numero positivo per x=730.

Pertanto x=730 è un punto di minimo della funzione obiettivo.

Per sapere a quanto ammonta la spesa per ogni abito, si procede sostituendo alla x della f.o. 730

$$y := 0.001\cdot x + \frac{532.9}{x} + 3.54$$

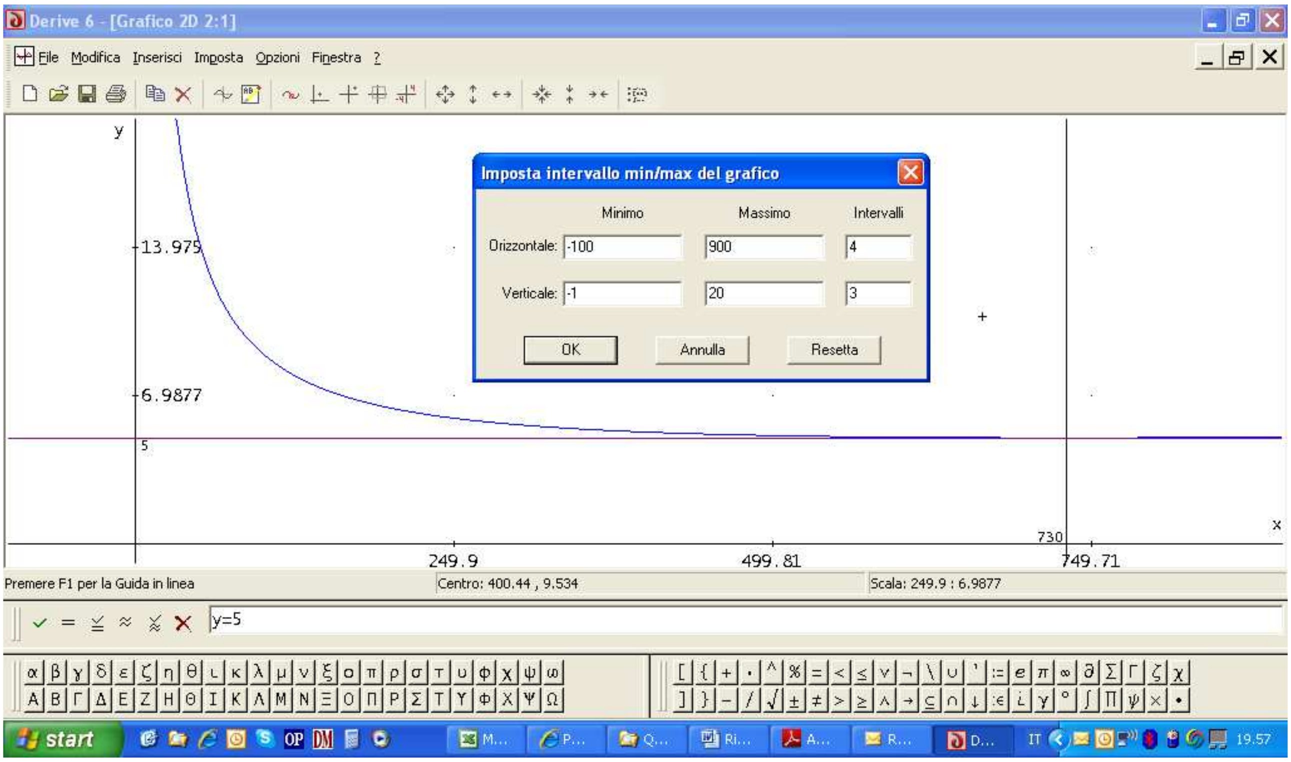
$$x := 730$$

$$y$$

$$5$$

Il minimo costo si ha perciò confezionando giornalmente 730 abiti, con una spesa per ogni abito di € 5

Come visto la f.o. è un’iperbole del tipo $y = ax + \frac{b}{x} + c$ la cui rappresentazione grafica è:



FORMULE PER EVENTUALI CALCOLI RELATIVI ALLA FUNZIONE PARTICOLARE

$x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$
$\min \equiv \left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} ; 2\sqrt{ab} + c\right)$;

Dimostrazione:

$$\begin{cases} y = ax + \dfrac{b}{x} + c \\ y = k \end{cases} \qquad ax^2 - x(k-c) + b = 0 \qquad x = \frac{k - c \pm \sqrt{[-(k-c)]^2 - 4ab}}{2a}$$

Posto $\Delta = 0$ $\quad [-(k-c)]^2 - 4ab = 0 \qquad k^2 - 2kc + c^2 - 4ab = 0$ per cui:

$$k = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4(c^2 - 4ab)}}{2a} = \frac{2c \pm \sqrt{16ab}}{2} = \frac{2c \pm 4\sqrt{ac}}{2} = \frac{2(c \pm 2\sqrt{ab})}{2} = c \pm 2\sqrt{ab}$$

Poiché lo studio della funzione è limitato al primo quadrante consideriamo solo la radice positiva

$$\boxed{y = 2\sqrt{ab} + c}$$

$$x = \frac{c + 2\sqrt{ab} - c \pm \sqrt{\left[c + 2\sqrt{ab} - c\right]^2 - 4ab}}{2a} = \frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{b}{a}}}$$

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 7 (utilizzo della funzione particolare: retta + iperbole)

Un'industria, la cui capacità massima di produzione è di 800 unità al mese, incontra nel processo di lavorazione le seguenti spese:

- **spesa fissa mensile di € 50.000**
- **spesa variabile per unità prodotta pari a 0,2 volte il n umero di unità prodotte mensilmente.**

Determinare il numero di unità che conviene produrre al mese in modo da ottenere il minimo costo unitario.

DATI

$C(x)=(0,2x)x+50.000=0,2x^2+50.000$ (costo totale)

$\frac{C(x)}{x}=0,2x+\frac{50000}{x}$ (funz. obiettivo costo unitario o costo medio di produzione)

con

$0<x\leq 800$

Occorre minimizzare la funzione obiettivo. A tal fine calcoliamo la derivata prima della f.o.:

$$y = 0.2\cdot x + \frac{50000}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(0.2\cdot x + \frac{50000}{x}\right)$$

$$\frac{1}{5} - \frac{50000}{x^2}$$

Si pone uguale a 0 e si risolve l'equazione

$$\frac{1}{5} - \frac{50000}{x^2} = 0$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{5} - \frac{50000}{x^2} = 0,\ x\right)$$

$$x = -500 \vee x = 500$$

Essendo $x>0$ si considera x=500

Pertanto x=500 è un punto di minimo della funzione obiettivo.

Per sapere a quanto ammonta la spesa per ogni unità, si procede sostituendo alla x della f.o. il valore 500

$$y := 0.2 \cdot x + \frac{50000}{x}$$

$$x := 500$$

$$y$$

$$200$$

Il minimo costo si ha perciò producendo 500 unità del bene, con una spesa per ogni unità di € 200

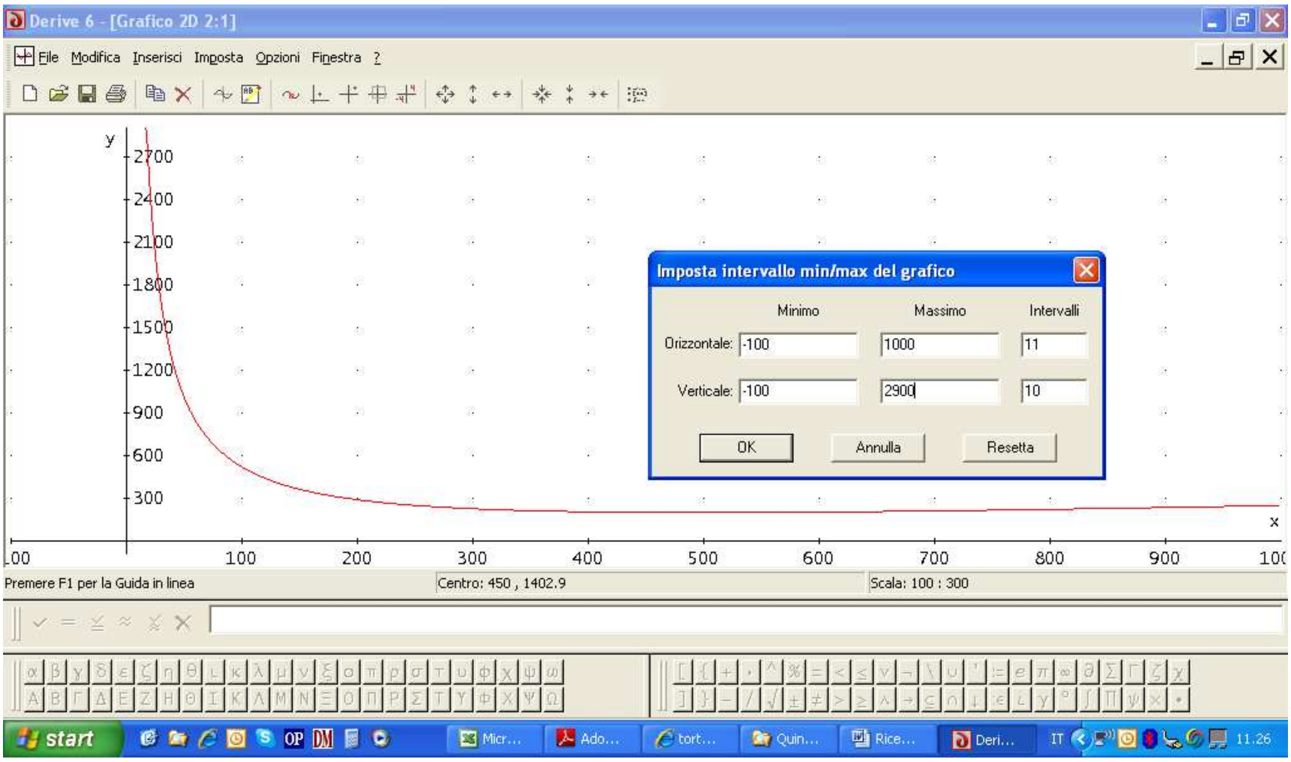
Che si tratti di un punto di minimo basterà verificare che la funzione derivata seconda sia maggiore di zero per x=500

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(0.2 \cdot x + \frac{50000}{x}\right)$$

$$\frac{100000}{x^3}$$

…che è un numero positivo per x = 500.

Come visto la f.o. è un’iperbole del tipo $y = ax + \frac{b}{x}$ la cui rappresentazione grafica è:



TIPICO PROBLEMA DI MINIMO
Il problema delle scorte

(utilizzo della funzione particolare: retta + iperbole)

Il problema delle scorte è assai importante nella pratica commerciale, e merita di essere trattato in generale. Per svolgere la propria funzione, un'azienda deve rifornirsi del materiale necessario: ad esempio acciaio, cemento, mattoni, sementi, componenti di automobili, bottiglie, vestiti, oggetti di cancelleria, e così via, a seconda della sua attività.

I costi di approvvigionamento sono essenzialmente di due tipi:

a) **costi di ordinazione**

Rientrano in questa categoria i costi telefonici, postali, di personale dovuti alla scelta del fornitore, alla stesura del contratto, alla compilazione della fattura, all'accettazione e al controllo della merce in arrivo.

Tali costi sono fondamentalmente indipendenti dalla quantità della merce acquistata ogni volta e si possono considerare fissi per ogni ordinazione; pertanto, da questo punto di vista, l'azienda ha convenienza ad effettuare poche ordinazioni, ognuna per quantitativi abbondanti.

b) **costi di magazzinaggio o di stoccaggio**

Rientrano in questa categoria i costi di affitto dei locali ove le merci sono conservate, di manutenzione e di custodia, di assicurazione contro furti e incendi e, infine, i costi finanziari del capitale immobilizzato nelle scorte.

Tali costi sono direttamente proporzionali alla quantità di merce mediamente giacente in magazzino: pertanto, da questo punto di vista, l'azienda ha interesse a effettuare numerose ordinazioni, ognuna per modesti quantitativi.

Il problema di conciliare le due opposte esigenze, in modo da rendere minimo il costo totale, può essere risolto in modo soddisfacente con semplici strumenti matematici. Introduciamo i seguenti simboli:

x = quantità di merce acquistata in ogni ordinazione
c_1 = costo di stoccaggio o magazzinaggio per unità di merce
c_2 = costo fisso di ogni ordinazione
q = quantità di merce necessaria all'impresa per svolgere la sua attività

$x/2$ = giacenza media $\left(\dfrac{0+x}{2}\right)$

$c_1 \cdot x/2$ = costi di stoccaggio <u>nel periodo considerato</u>

q/x = numero di ordinazioni (ciascuna di costo fisso c_2)

y = costo totale annuo dell'approvvigionamento (funzione obiettivo)

y = costi di stoccaggio nel periodo considerato + costi di ordinazione (funzione obiettivo)

Si tratta dunque di calcolare il minimo della funzione obiettivo

$$\boxed{y = c_1 \cdot \frac{x}{2} + \frac{q}{x} \cdot c_2}$$

Posto: $k_1 = \frac{c_1}{2}$ e $k_2 = q \cdot c_2$ si ha:

$y = k_1 x + \frac{k_2}{x}$ con x>0 (f.o. da rendere minima)

A tal fine calcoliamo la derivata prima della f.o.:

$y^{I} = k_1 \cdot 1 + \frac{0 \cdot 1 - k_2 \cdot 1}{x^2} = k_1 - \frac{k_2}{x^2}$ che poniamo uguale a 0 perché nel punto di minimo la derivata prima è uguale a zero, risolvendo l'equazione $k_1 - \frac{k_2}{x^2} = 0$

……otteniamo $x = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ essendo x > 0. Sostituendo si ha: $x = \sqrt{\frac{2qc_2}{c_1}}$ (1)

Condizione perché x sia un minimo è che la $y^{II} > 0$ infatti:

$y^{II} = 0 - \frac{0 \cdot x^2 - k_2 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2k_2}{x^3}$ che è una quantità positiva essendo x, k >0

Pertanto la quantità $x = \sqrt{\frac{2qc_2}{c_1}}$ è la quantità di merce che rende minimo il costo di approvvigionamento.

TIPICO PROBLEMA DI MINIMO
Il problema delle scorte

ESERCIZIO 8 (utilizzo della funzione particolare: retta + iperbole)

Con riferimento a un'impresa industriale che impiega, con consumo uniforme nel tempo, nella sua produzione una certa materia prima, si hanno i seguenti dati:

- **consumo materia prima: 100 q/giorno;**
- **costo fisso per ogni ordinazione: € 50**
- **costo di magazzinaggio: € 0,01 al q/giorno.**

Determinare la quantità di materia da ordinare ogni volta.

DATI
x = quantità acquistata in ogni ordinazione

Costo di magazzinaggio o stoccaggio annuo = 0,01 * x/2 * 360 gg = $1{,}8 \cdot x$

Costo di ordinazione annuo = (100 * 30gg * 12 mesi)/x * 50 = $\frac{36000}{x} \cdot 50$

dove (100 * 30gg * 12 mesi) è la quantità complessiva da comprare in un anno

Si tratta pertanto di rendere minimo il costo totale di approvvigionamento dato dalla funzione obiettivo:

$$y = 1{,}8 \cdot x + \frac{36000}{x} \cdot 50$$

Basterà semplicemente ricavare la derivata prima della f.o., porla uguale a zero e risolvere l'equazione:

$$y = 1.8 \cdot x + \frac{36000 \cdot 50}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(1.8 \cdot x + \frac{36000 \cdot 50}{x}\right)$$

$$\frac{9}{5} - \frac{1800000}{x^2}$$

$$\frac{9}{5} - \frac{1800000}{x^2} = 0$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{9}{5} - \frac{1800000}{x^2} = 0,\ x\right)$$

$$x = -1000 \lor x = 1000$$

La soluzione negativa NON interessa.

<u>Pertanto la quantità da acquistare in ogni ordinazione è di 1000 q.</u>

Il costo complessivo annuo è di 3600 € (ottenuto sostituendo alla x nella f.o. il valore 1000)

<u>Alla stessa soluzione si perviene applicando la (1)</u> : $x = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 50}{0{,}01}} = 1000$

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 9 (scelta fra più alternative)

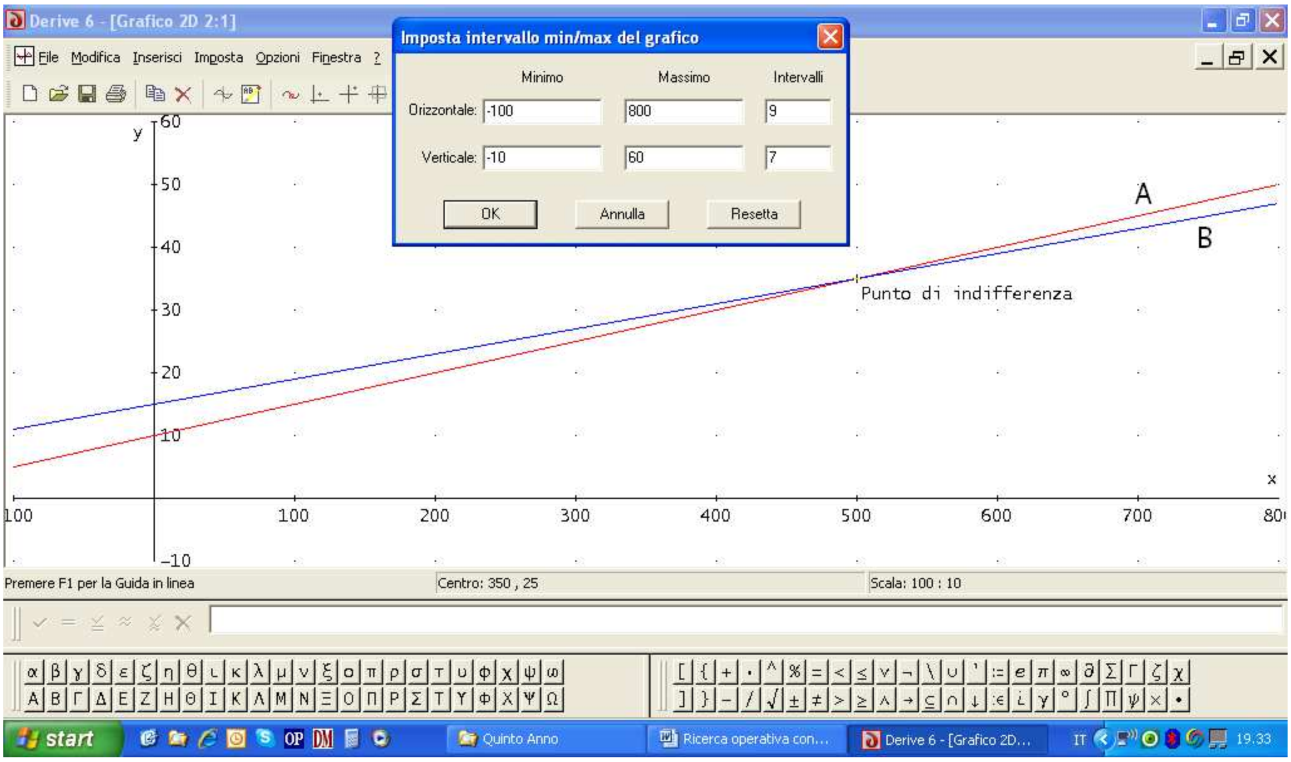
Un utente può scegliere fra le due seguenti tariffe per la fornitura di energia elettrica:

- **TARIFFA A € 0,05 al kwh + 10 € fissi al mese**
- **TARIFFA B € 0,04 al kwh + 15 € fissi al mese**

Determinare la tariffa che rende minima la spesa mensile al variare del consumo e l'importo della spesa per un consumo previsto di 400 kwh/mese.

```
DATI
Tariffa A → y=0,05x+10
Tariffa B → y=0,04x+15
x = consumo mensile
```
$x \geq 0$

Si procede con la rappresentazione grafica delle funzioni:



Vediamo che per rispondere al problema bisogna ricavare le coordinate del punto d'indifferenza in cui cambiano le situazioni:

```
SOLVE([y = 0.05·x + 10, y = 0.04·x + 15], [x, y])

                                        [x = 500 ∧ y = 35]
```

Pertanto:

- per $0 \leq x < 500$ è conveniente l'alternativa A
- per x = 500 l'alternativa A o B indifferentemente
- per x > 500 l'alternativa B

con un consumo previsto di 400 kwh/mese si ha, per ciascuna tariffa, la spesa:

Tariffa A	$y := 0.05 \cdot x + 10$ $x := 400$ y 30

Tariffa B	$y := 0.04 \cdot x + 15$ $x := 400$ y 31

Dal confronto dei due risultati si vede che conviene la tariffa A

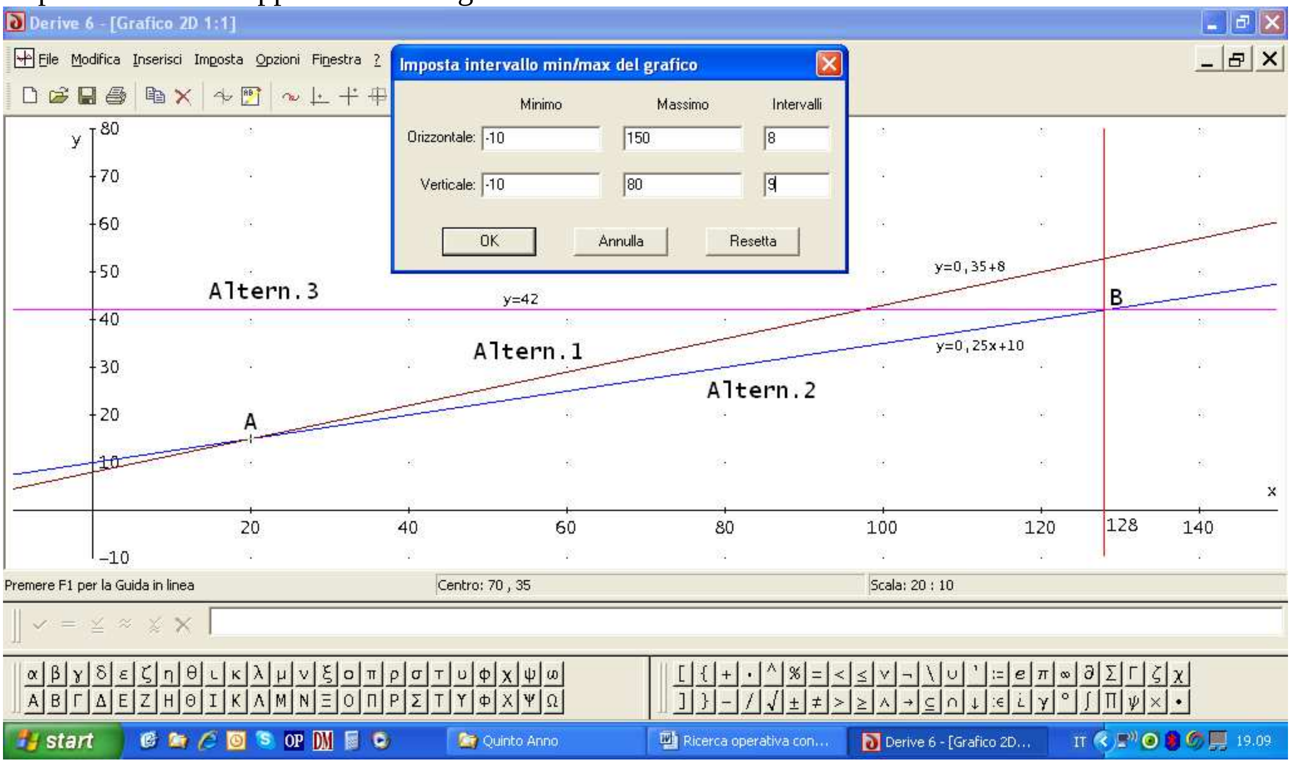
PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA
dipendenti da una sola variabile di scelta con effetti immediati

ESERCIZIO 10 (scelta fra più alternative)

Se le seguenti funzioni $y_1 = 0{,}35x + 8$ $y_2 = 0{,}25x + 10$ $y_3 = 42$ rappresentano delle alternative di costo al variare della x, quale alternativa è più conveniente?

DATI
y_1, y_2 e y_3 funzioni costo
$x \geq 0$

Si procede con la rappresentazione grafica delle funzioni:



Vediamo che per rispondere al problema bisogna ricavare le coordinate dei punti A e B in cui cambiano le situazioni:

SOLVE([y = 0.35·x + 8, y = 0.25·x + 10], [x, y])

[x = 20 ∧ y = 15] punto A

SOLVE([y = 0.25·x + 10, y = 42], [x, y])

[x = 128 ∧ y = 42] punto B

Pertanto:
- per $0 \leq x < 20$ è conveniente l'alternativa 1
- per x = 20 l'alternativa 1 o 2 indifferentemente: A è un punto di indifferenza
- per $20 < x < 128$ l'alternativa 2
- per x = 128 l'alternativa 2 o 3 indifferentemente: B è un punto di indifferenza
- per x >128 l'alternativa 3