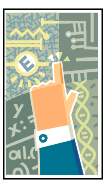
RADICALI ARITMETICI

maria teresa bianchi

definizioni proprietà operazioni	formule	esempi	dimostrazioni e note
Si definisce **radicale aritmetico**	$\sqrt[n]{a}=b$ se $b^n=a$ $a>0, b>0$ $n\in\mathbb{N}_0$	$\sqrt{25}=5$ $5^2=25$ $\sqrt[3]{-8}=-2$ $(-2)^3=-8$	 **q.e.d.** **“quod erat demonstrandum”**
Si ha dalla definizione:	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	$(\sqrt[5]{2})^5=2$	
Ogni radicale può essere scritto come una potenza ad **esponente frazionario**	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[2]{3}=3^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$	Elevando alla **n** ambo i membri dell’uguaglianza da verificare si ottiene lo stesso risultato: $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$ $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$ N.B.: Scrivendo i radicali come potenze ad esponente frazionario si possono sempre utilizzare le proprietà delle potenze nelle dimostrazioni
PROPRIETA’ INVARIANTIVA Moltiplicando l’indice del radicale e l’esponente del radicando per uno stesso numero **p** naturale e diverso da zero il radicale non cambia.	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ $p\in\mathbb{N}_0$	$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3\cdot4]{a^{2\cdot4}}=\sqrt[12]{a^8}$ $p=4$	Si scrivono i due membri delle espressioni come potenze ad esponente frazionario: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[np]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}}$ Si osserva che si perviene allo stesso risultato. q.e.d.
La proprietà invariantiva permette: **SEMPLIFICAZIONE di un radicale** Si raccomanda di scomporre **sempre** in **fattori primi** gli “oggetti” (numeri, polinomi…) che costituiscono il radicando		$\sqrt[10]{4a^2b^6}=$ $\sqrt[10]{2^2a^2b^6}=$ $\sqrt[10]{(2ab^3)^2}=$ $\sqrt[5]{2ab^3}$ $\sqrt[8]{9a^4(x^2-2x+1)}=$ $\sqrt[8]{3^2a^4(x-1)^2}=$ $\sqrt[8]{\left[3a^2(x-1)\right]^2}=$ $\sqrt[4]{3a^2(x-1)}$	
RIDUZIONE allo stesso indice Quando si hanno **due o più radicali** è importante, per confrontarli numericamente e per eseguire le operazioni, che abbiano lo stesso indice: la proprietà invariantiva lo permette!!!!!!		$\sqrt[8]{3},\sqrt{2},\sqrt[4]{5}$ il m.c.m. degli indici è 8 8 sarà il nuovo indice $\sqrt[8]{3},\sqrt[8]{2^4},\sqrt[8]{5^2}$ $\sqrt[8]{3},\sqrt[8]{16},\sqrt[8]{25}$	Utilizza la **calcolatrice scientifica** del tuo pc! **Start** **Programmi** **Accessori** **Calcolatrice** … verifica la grandezza numerica dei radicali dati e di quelli ridotti allo stesso indice. Quando sono ridotti allo stesso indice si possono confrontare senza l’uso della calcolatrice!!!
MOLTIPLICAZIONE Il prodotto di due o più radicali aventi lo stesso indice, è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi. N.B.: Se non hanno lo stesso indice prima si fa la riduzione allo stesso indice	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{7}=$ $\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{7^5}=$ $\sqrt[15]{2^3\cdot7^5}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=$ $a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=$ $\sqrt[n]{ab}$
DIVISIONE Il quoziente di due o più radicali aventi lo stesso indice, è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi, purchè il secondo radicale sia diverso da zero. N.B.: Se non hanno lo stesso indice prima si fa la riduzione allo stesso indice	$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}$ $b\neq0$	$\sqrt[5]{ab^2}\div\sqrt[5]{b}=$ $\sqrt[5]{(ab^2)\div b}=$ $\sqrt[5]{ab}$ $b\neq0$	$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=$ $a^{\frac{1}{n}}\div b^{\frac{1}{n}}=(a\div b)^{\frac{1}{n}}=$ $\sqrt[n]{a\div b}$ $b\neq0$
POTENZA La potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza del radicando con lo stesso esponente del radicale	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=$ $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=$ $\sqrt[n]{a^m}$
RADICE DI UN RADICALE La radice di un radicale è uguale alla radice dello stesso radicando avente per indice il prodotto degli indici	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}=\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$ $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=$ $\sqrt[nm]{a}$

SOMMA ALGEBRICA Non ci sono proprietà delle potenze e,quindi dei radicali,che riguardino le somme. Si possono sommare algebricamente solo radicali detti **simili**, utilizzando la **proprietà invariantiva** della moltiplicazione rispetto all'addizione	$\sqrt[6]{a},\ 3\sqrt[6]{a},\ -5\sqrt[6]{a}$ **sono radicali simili**	$\sqrt[6]{a}+3\sqrt[6]{a}-5\sqrt[6]{a}=$ $(1+3-5)\sqrt[6]{a}=$ $-1\sqrt[6]{a}$	proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione **a(x+y)=ax+ay**
PORTAR FUORI	$\sqrt[n]{a^{np}b}=a^p\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{a^6b}=a^2\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[n]{a^{np}b}=\sqrt[n]{(a^p)^n}\cdot\sqrt[n]{b}=$ $a^p\sqrt[n]{b}$
PORTAR DENTRO	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$	$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=$ $\sqrt[n]{a^nb}$
RADICALI DOPPI	$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=$ $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ $con\ \ a^2-b\geq 0$	$\sqrt{7\pm\sqrt{24}}=$ $\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-24}}{2}}\pm\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-24}}{2}}=$ $con\ \ 7^2-24=25>0$ $\sqrt{\frac{7+5}{2}}\pm\sqrt{\frac{7-5}{2}}=$ $\sqrt{6}\pm 1$	La formula si dimostra elevando al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza. Al termine dei calcoli si ottengono due risultati uguali.

RAZIONALIZZAZIONE di RADICALI

Razionalizzare una frazione che contiene radicali al denominatore significa trasformarla in una equivalente che non ha più radicali a denominatore.
Per fare ciò si applica la proprietà invariantiva delle frazioni: moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso fattore diverso da zero si ottiene una frazione equivalente.

casi	formule	esempi	dimostrazioni
un radicale quadratico a denominatore	$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$ in questo caso si moltiplica numeratore e denominatore per $\sqrt{a}$ $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$		Dimostrare l'uguaglianza $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$ - si elevano ambo i membri al quadrato e si avrà lo stesso risultato - oppure si scrivono i radicali come potenze ad esponente frazionario e si osserva l'uguaglianza delle due espressioni
curiosità	$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$	
	$\frac{na}{\sqrt{a}}=\frac{na}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{na\sqrt{a}}{a}=n\sqrt{a}$	$\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$	
un radicale a denominatore	$\frac{b}{\sqrt[n]{a}}=\frac{b}{\sqrt[n]{a}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$ $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$ con n>m	$\frac{6}{\sqrt[3]{2}}=\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{6\sqrt[3]{2^2}}{2}=3\sqrt[3]{4}$ $\frac{4}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{4}{\sqrt[5]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{4\sqrt[5]{2^2}}{2}=2\sqrt[5]{4}$	$\frac{b}{\sqrt[n]{a}}=\frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$ - si elevano ambo i membri al quadrato e si avrà lo stesso risultato - oppure si scrivono i radicali come potenze ad esponente frazionario e si osserva l'uguaglianza delle due espressioni
a denominatore somma o differenza di cui almeno un termine è un radicale quadratico	$\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}=$ $\frac{c(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$	$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$ $\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$	

Maria Teresa Bianchi

http://matebi.splinder.com